

Risoluzione quesiti I esonero 2011

1) Compito 1 – Q3

Un'azienda ha a disposizione due progetti di investimento tra di loro alternativi. Il primo prevede il pagamento di un importo pari a 100 all'epoca 0 e flussi pari a 60 all'epoca 1, 30 all'epoca 2 e 50 all'epoca 3.

Il secondo investimento è un'obbligazione con cedole annue equivalente sul versante del TIR al primo progetto che richiede però un esborso di 90. L'operazione integrativa del secondo progetto è uno ZCB.

Si calcoli il TIR del primo progetto; il valore di rimborso dello ZCB integrativo.

Risoluzione.

Lo scadenziario della prima operazione è

0	1	2	3
-100	60	30	50

Il TIR si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio finanziario

$$60 \cdot (1 + TIR)^{-1} + 30 \cdot (1 + TIR)^{-2} + 50 \cdot (1 + TIR)^{-3} = 100$$

la cui soluzione è $TIR \approx 19,84\%$ (risolvere per interpolazione prendendo come soglie il 19% e il 20%).

L'obbligazione fornisce perciò cedole annue d'importo pari a 19,84.

Riportiamo lo scadenziario dei due progetti d'investimento:

0	1	2	3
-100	60	30	50
-90	19.84	19.84	119.84

Le due operazioni non sono confrontabili perché non presentano lo stesso esborso iniziale. L'operazione integrativa consiste in uno ZCB con prezzo pari a 10 il cui valore di rimborso (all'epoca tre) sarà pari a

$$V_3 = 10 \cdot (1 + TIR)^3 = 17,21$$

2) Compito 2 – Q1

Realizzare l'ammortamento francese a interessi anticipati di un importo di 100.000 al tasso i del 10% in 7 anni.

Valutare nuda proprietà e usufrutto all'epoca 4 al tasso del 15%.

Risoluzione.

Il tasso di sconto associato al tasso i è

$$d = \frac{i}{1+i} = 0,0909$$

La prima quota interessi anticipata (all'epoca zero) vale

$$QI_0 = 100.000 \cdot d = 9.090,91 = R_0$$

La rata costante (dall'epoca uno in avanti) si ottiene dalla relazione

$$R = \frac{100.000 \cdot v}{a_{\overline{7}|i}} = 18.673,23$$

dove $v = (1+i)^{-1} = 0,9091$ è il fattore di attualizzazione.

Le quote capitale si ottengono dalle relazioni (con $h = 1, \dots, 7$):

$$QC_h = R \cdot v^{7-h}$$

Si deducono quindi il debito residuo dalla consueta relazione

$$DR_h = DR_{h-1} - QC_h$$

e le quote interessi (anticipate):

$$QI_h = DR_h \cdot d$$

Le quote interessi si ottengono in maniera alternativa come differenza tra la rata e la quota capitale (riguardo le stesse epoche).

Il piano d'ammortamento completo è:

N	QC	QI	R	DR
0	0.00	9 090.91	9 090.91	100 000.00
1	10 540.55	8 132.68	18 673.23	89 459.45
2	11 594.60	7 078.62	18 673.23	77 864.85
3	12 754.07	5 919.16	18 673.23	65 110.78
4	14 029.47	4 643.76	18 673.23	51 081.31
5	15 432.42	3 240.81	18 673.23	35 648.89
6	16 975.66	1 697.57	18 673.23	18 673.23
7	18 673.23	0.00	18 673.23	0.00

Osserviamo che all'epoca zero la rata è pari alla prima quota interessi anticipata mentre all'epoca finale la rata è pari alla quota capitale (l'ultima quota interessi è pari a zero).

Osserviamo inoltre che sono verificate le seguenti relazioni generali:

$$\sum_{k=0}^7 QC_k = 100.000$$

$$\sum_{k=1}^7 R \cdot v^k + QI_0 = 100.000$$

Determiniamo infine nuda proprietà e usufrutto all'epoca 4 al tasso del 15%. Si ha per definizione:

$$N_4 = \frac{15.432,42}{1,15} + \frac{16.975,66}{1,15^2} + \frac{18.673,23}{1,15^3} = 38.533,48$$

$$U_4 = \frac{3.240,81}{1,15} + \frac{1.697,57}{1,15^2} = 4.101,70$$

3) Compito 2B – Q3

Un'azienda cede due crediti di valore nominale pari a 110 e 190 scadenti rispettivamente in $t = 1,5$ e $t = 3$; il factor li acquista in una quota pari all'80% e li sconta in RF sconto commerciale al tasso $i = 0,08$.

Con il ricavato l'azienda attiva un progetto di investimento che gli fornisce entrate pari a 60 per 6 anni di seguito; reinveste la parte non smobilizzata dei due crediti originari al tasso del 5% fino all'epoca 6.

Si calcoli il TIR del progetto complessivo.

Risoluzione.

I due crediti, decurtati del 20% e attualizzati all'epoca zero nel regime dello sconto commerciale forniscono i seguenti importi:

$$V_1 = 110 \cdot 0,80 \cdot v(1,5) = 110 \cdot 0,80 \cdot (1 - d \cdot 1,5) = 78,22$$

$$V_2 = 190 \cdot 0,80 \cdot v(3) = 190 \cdot 0,80 \cdot (1 - d \cdot 3) = 118,22$$

con $d = \frac{i}{1+i} = 0,0741$ il tasso di sconto associato.

Il ricavato $V_1 + V_2 = 196,44$ consente di attivare un investimento il cui scadenziario è:

0	1	1.5	2	3	4	5	6
-196.44	60	0	60	60	60	60	60

La parte non smobilizzata dei due crediti originari è reinvestita al tasso del 5% fino all'epoca 6 (in assenza di altre informazioni utilizziamo il RFIC). Avremo quindi per ciascuno dei due crediti:

$$110 \cdot 0,20 \cdot 1,05^{6-1,5} = 27,40$$

$$190 \cdot 0,20 \cdot 1,05^{6-3} = 43,99$$

Riportiamo infine lo scadenziario di tutte le operazioni e del progetto complessivo (saldo netto per ogni epoca):

epoche	0	1	1.5	2	3	4	5	6
	-196.44	60	0	60	60	60	60	60
	0	0	-22	0	0	0	0	27.40
	0	0	0	0	-38	0	0	43.99
saldo	-196.44	60.00	-22.00	60.00	22.00	60.00	60.00	131.39

Il TIR si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio finanziario:

$$\frac{60}{(1+TIR)^{-1}} - \frac{22}{(1+TIR)^{-1,5}} + \frac{60}{(1+TIR)^{-2}} + \frac{22}{(1+TIR)^{-3}} + \frac{60}{(1+TIR)^{-4}} + \frac{60}{(1+TIR)^{-5}} + \frac{131,39}{(1+TIR)^{-6}} = 196,44$$

La soluzione è $TIR \approx 17,93\%$ (risolvere per interpolazione prendendo come soglie il 17% e il 18%).

4) Compito 3 – Q3

Un individuo di età 40 anni versa annualmente contributi costanti a un fondo pensione che al compimento dei 65 anni gli erogherà una rendita di rata annua pari a 18.000 Euro fino a 85 anni. Il fondo impiega gli importi versati (contributi) a un tasso che è pari al 5% per i primi 10 anni, è pari al 6% nei successivi 5 e ritorna al 5% fino alla pensione.

Calcolare:

- l'importo del contributo annuo;
- il TIR dello schema pensionistico.

Risoluzione.

Il problema richiede l'equivalenza tra due rendite (al compimento dei 65 anni dell'individuo): il montante dei contributi sarà pari al valore attuale del flusso costituito dalla pensione. Entrambe le rendite sono costituite da rate costanti, periodiche e posticipate. Indichiamo con X il contributo incognito.

Avremo per il flusso dei contributi:

$$M = X \cdot s_{\overline{10}|0,05} \cdot (1+0,06)^5 \cdot (1+0,05)^{10} + X \cdot s_{\overline{5}|0,06} \cdot (1+0,05)^{10} + X \cdot s_{\overline{10}|0,05}$$

Per quanto riguarda il valore attuale dei flussi derivanti dalla pensione, avremo (ipotizzando che il tasso sia rimasto pari al 5%):

$$VA = 18.000 \cdot a_{\overline{20}|0,05} = 224.319,79$$

L'equazione lineare $M = VA$ nell'incognita X possiede la soluzione $X = 4.561,41$.

Infine, il TIR dello schema pensionistico completo si ottiene risolvendo l'equazione

$$4.561,41 \cdot a_{\overline{25}|TIR} - 18.000 \cdot a_{\overline{20}|TIR} \cdot (1+TIR)^{-25} = 0$$

ottenuta attualizzando tutti i flussi (contributi e pensione) all'epoca alla quale inizia il versamento dei contributi.

Si ottiene per interpolazione $TIR \approx 6,41\%$ (prendere le soglie 6% e 7%).

5) Compito 4 – Q1

Un'azienda si accorda per restituire un prestito di 10 milioni di euro in 5 anni a quote capitali crescenti in progressione aritmetica di ragione 500.000 Euro.

I tassi variano anch'essi anno per anno: il primo anno il tasso è pari al 5% e poi cresce di mezzo punto percentuale in ogni anno. Stendere il piano di ammortamento e valutare nuda proprietà e usufrutto al 10% all'epoca 2.

Risoluzione.

Indichiamo con X la prima quota capitale incognita. Le quote soddisfano perciò la relazione

$$QC_k = X + (k-1) \cdot 500.000 \quad k = 1, \dots, 5$$

Dalla condizione $\sum_{k=1}^5 QC_k = 10.000.000$, si ottiene facilmente $X = 1.000.000$.

Dalla conoscenza delle quote capitale si ottiene quindi il piano completo:

n	QC	QI	R	DR	tassi
0				10 000 000	
1	1 000 000	500 000	1 500 000	9 000 000	5.0%
2	1 500 000	495 000	1 995 000	7 500 000	5.5%
3	2 000 000	450 000	2 450 000	5 500 000	6.0%
4	2 500 000	357 500	2 857 500	3 000 000	6.5%
5	3 000 000	210 000	3 210 000	0	7.0%

Osserviamo che la quota interesse sarà calcolata (sul debito residuo) utilizzando il tasso d'interesse relativo al proprio periodo.

Determiniamo infine nuda proprietà e usufrutto all'epoca 2 al tasso del 10%. Si ha per definizione:

$$N_2 = \frac{2.000.000}{1,10} + \frac{2.500.000}{1,10^2} + \frac{3.000.000}{1,10^3} = 6.138.241,92$$

$$U_2 = \frac{450.000}{1,10} + \frac{357.500}{1,10^2} + \frac{210.000}{1,10^3} = 862.321,56$$

6) Compito 4 – Q3

Un immobile è affittato a 1.000 euro al mese per 5 anni. Il canone è fissato anno per anno e negli anni successivi al primo l'importo del canone stesso cresce in base all'inflazione che è pari al 2%.

Calcolare:

- il VAN dell'investimento utilizzando come tasso il 5%;
- il canone annuo costante finanziariamente equivalente a quello variabile con l'inflazione.

Risoluzione.

I canoni mensili per gli anni successivi al primo saranno rispettivamente: $1.000 \cdot 1,02 = 1.020$; $1.000 \cdot 1,02^2 = 1.040,4$; $1.000 \cdot 1,02^3 = 1.061,21$ e $1.000 \cdot 1,02^4 = 1.082,43$.

Abbiamo perciò una rendita con rate mensili. Per il calcolo del VAN, determiniamo dapprima il tasso mensile equivalente:

$$i_{1/12} = 1,05^{1/12} - 1 \approx 0,004074$$

Avremo perciò:

$$VAN = 1.000 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/12}} + 1.020 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/12}} \cdot 1,05^{-1} + 1.040,4 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/12}} \cdot 1,05^{-2} + 1.061,21 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/12}} \cdot 1,05^{-3} + 1.082,43 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/12}} \cdot 1,05^{-4} = 55.195,43$$

La rendita può essere scomposta in cinque blocchi che comprendono dodici rate mensili. Gli ultimi quattro blocchi rappresentano delle rendite differite perciò nel calcolo del valore attuale di ciascun blocco dovremo inserire un opportuno fattore di differimento.

Ipotizziamo ora che tutte le rate siano costanti. Dovremo quindi risolvere l'equazione:

$$X \cdot a_{\overline{60}|i_{1/12}} = 55.195,43 \rightarrow X = \frac{55.195,43}{a_{\overline{60}|i_{1/12}}} = 1.038,80$$